УДК 536.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОМЕРЗАНИЯ НАСЫЩЕННОГО ВЛАГОЙ ГРУНТА

Т.А. Нагорнова

Томский политехнический университет
E-mail: aleta@mail2000.ru

Решена задача о промерзании грунта с использованием математической модели, существенно отличающейся от классической постановки Стефана, без явного выделения границы фазового перехода. Задача решена методом конечных разностей с применением неявной итерационной разностной схемы. Установлено, что предложенный подход приводит к результатам, отличающимся не более чем на 4,4 % по температурам и по координате фронта промерзания при решении одномерной задачи.

Многие процессы теплообмена связаны с изменением агрегатного состояния материала. При этом теплофизические характеристики материала изменяются скачкообразно, и при фазовых переходах происходит выделение или поглощение теплоты [1]. Решение подобного рода задач имеет большое практическое значение в металлургии, строительной теплотехнике и в других прикладных дисциплинах.

В большинстве случаев решения задач о движении границы между жидкостью и твердым телом проводят по методу Стефана [2]. Следует отметить, что данный метод применим для одномерной постановки задачи, но значительно сложнее обстоит дело с двухмерной или с трехмерной задачей. Это является недостатком метода Стефана. В данной работе рассматривается другой подход к моделированию фазового перехода, отличный от классической задачи Стефана [2].

Рассмотрим этот подход на примере задачи о промерзании насыщенного влагой грунта. Анализ проводится на примере пластины бесконечной длины, толщиной L с некоторой начальной фиксированной температурой T_0. В начальный момент времени на поверхности грунта устанавливается температура $T_п$, ниже температуры замерзания $T_з$ воды. В результате грунт начинает промерзать. Образуется промерзший слой переменной толщины ξ, зависящей от времени. Подвижная граница промерзания всегда имеет температуру кристаллизации. На этой границе происходит переход из одного агрегатного состояния в другое, при этом выделяется теплота Q.

Для описания процесса охлаждения грунта при промерзании используется модель [3], в которой явно не выделяется граница промерзания в граничных условиях и область решения не разбивается на две подобласти, соответствующие разным агрегатным состояниям. Процесс тепловыделения при кристаллизации описывается источниковым членом в уравнении теплопроводности. Значение объемной скорости промерзания W рассчитывается по скорости продвижения изотермы $T=T_з$. Теплофизические свойства материала считаются постоянными. Задача рассматривается в неподвижной системе координат.

Математическая постановка задачи в рамках рассматриваемой модели имеет вид:

$$c(T)\cdot\rho(T)\frac{\partial T}{\partial\tau}=\lambda(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{Q_з\cdot W}{L},$$
$$\tau>0,\ 0<x<L, \qquad (1)$$

где c – теплоемкость; ρ – плотность; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; τ – время; x – координата; L – толщина слоя грунта; $Q_з$ – теплота кристаллизации; $W=\rho\cdot V$ – массовая скорость промерзания; V – линейная скорость кристаллизации.

Начальные условия:

$$\tau=0,\ T=T_0,\ 0<x<L, \qquad (2)$$

$$\tau=0,\ \xi=0. \qquad (3)$$

T_0 – начальная температура.

Граничные условия:

$$x=0,\ T=T_п, \qquad (4)$$

$$x=\xi,\ T=T_з=\text{const}, \qquad (5)$$

$$x=L,\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0. \qquad (6)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности для слоя грунта с граничными

условиями первого рода на поверхности охлаждения решена методом конечных разностей [4]. Разностные аналоги исходных дифференциальных уравнений решены методом итераций с применением неявной четырехточечной разностной схемы. Область решения задачи массопереноса имела подвижную границу, поэтому вычисления проводились на нерегулярной сетке, учитывающей продвижение фронта промерзания вглубь грунта с переменной во времени скоростью. Особенность предложенного метода основывается на том, что скорость промерзания рассчитывается по температурам в узлах разностной сетки. С течением времени толщина промерзания увеличивается. Численное значение ξ рассчитывается по формуле:

$$\xi(\tau) = h \cdot i(\tau) + h\frac{T_{i-1}(\tau) - T_з}{T_{i-1}(\tau) - T_i(\tau)}, \qquad (7)$$

здесь h – шаг разностной сетки по x; i – номер узла сетки, в котором значение температуры достигло температуры замерзания воды; T_{i-1}, T_i – значение температуры в данный момент времени в (i–1) и (i) узлах сетки.

Линейную скорость кристаллизации можно вычислить, используя следующее выражение:

$$V = \frac{\xi(\tau + \Delta\tau) - \xi(\tau)}{\Delta\tau} \cdot h, \qquad (8)$$

где $\xi(\tau+\Delta\tau)$ и $\xi(\tau)$ – толщина промерзшего слоя в рассматриваемый и предыдущий моменты времени; $\Delta\tau$ – шаг разностной сетки по времени.

Поскольку поставленная задача решалась в одномерной постановке, то данный метод был протестирован по задаче Стефана о промерзании насыщенного влагой грунта. Решение стефановской задачи проводилось численно, по выше указанному алгоритму (1–8). Было выделено две подобласти решения. На каждом шаге по времени определялась толщина промерзания (граница раздела областей), а затем рассчитывалось температурное поле.

Температура замерзания различных грунтов зависит от влажности и консистенции, для водонасыщенных песчаных, текучих и текуче-пластичных глинистых грунтов данная температура близка к 273 K [5]. В этом случае задачу о промерзания грунта можно свести к задаче образования льда в воде [2]. Поэтому при проведении расчетов использовались значения: L=0,03 м; T_0=247 K; $\rho_л$=920 кг/м^3; $\rho_в$=1000 кг/м^3; $c_л$=2100 Дж/(кг·K); $c_в$=4200 Дж/(кг·K); $\lambda_л$=2,7 Вт/(м·K); $\lambda_в$=0,68 Вт/(м·K); $T_з$=273 K; $Q_з$=334 кДж/кг [6, 7].

На рис. 1 приведено типичное распределение температур по x при условии $T_п$=272 K.

На рис. 1 представлены зависимости температуры от координаты, полученные при решении задачи о промерзании грунта двумя различными подходами. Кривая 1 соответствует выше предложенной модели (1–8), а кривая 2 – модели Стефана. Как видно, температурные поля для разных решений незначительно отличаются друг от друга. На рис. 2 показано изменение величины промерзшего слоя от времени. При расчете толщины промерзшего слоя ξ на момент времени 200 с, были получены следующие результаты: 1,34 мм для решения первым способом, 1,28 – вторым, рис. 2. Анализ полученных результатов показывает, что относительная погрешность вычислений величины ξ составляет 4,4 %. Это позволяет сделать вывод о целесообразности использования модели (1–8) при решении задачи с учетом теплоты кристаллизации. Примером задач с фазовым переходом также являются такие процессы как конденсация и плавление. Следовательно, выше предложенная модель может быть применима и для их решения. Этот подход позволяет упростить процедуру расчета математического моделирования многомерной задачи с фазовым переходом. Следует отметить, что для проведенного исследования был использован относительно небольшой перепад температур.

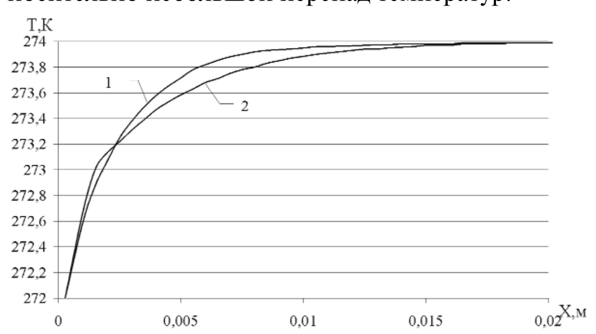


Рис. 1. *Распределение температуры по координате x: 1) модель (1–8), 2) задача Стефана [2]*

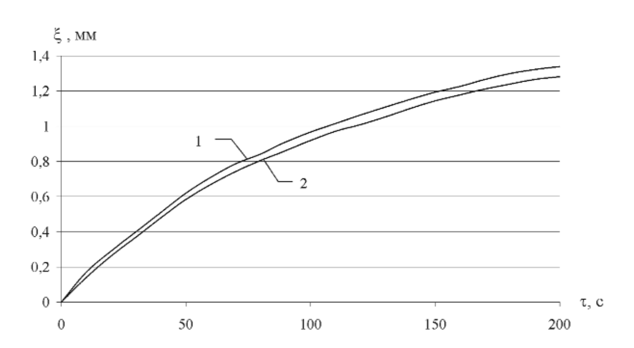


Рис. 2. *Зависимость толщины промерзания от времени: 1) модель (1–8), 2) задача Стефана [2]*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воздействие лазерного излучения на материалы / Р.В. Арутюнян, В.Ю. Баранов, А.А. Большой и др. – М.: Наука, 1989. – 367 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
3. Кузнецов Г.В., Нестерова Е.С. Температурное поле частицы при осаждении из высокотемпературного газового потока на поверхность // Физика и химия обработки материалов. – 2000. – № 2. – С. 30–34.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
5. Цитович Н.А. Механика мерзлых грунтов. – М.: Высшая школа, 1973. – 448 с.
6. Физические величины: Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
7. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 520 с.

УДК 621.833.3